**月球对地球表面物体潮汐力的分析与模型构建**

**作者：王凯灵**

小组成员：王凯灵，王浩丞，郑泽一，李奇睿

指导老师：徐海光，汪丽，杨明焘

上海交通大学

*摘要——*本文比较了太阳-地球系统和地球-月球系统潮汐力的异同，建立了地月潮汐力模型，分析和推导了月球对地球表面物体潮汐力，与已有模型进行比较，并结合真实数据做出评估，建立了系统质心模型和精确的地心系模型。

关键词——力学，地球, 月球, 潮汐力, 质心, 双星系统。

# **引言**

潮汐力是指物体表各点到引力源距离不等，从而受到的引力差。人类对潮汐力的了解已有数千年。在牛顿力学的建立和万有引力的发现以后，物理学家以各种方式推导潮汐力。潮汐力的推导除了具有重要理论意义以外，对日常生活和其他研究也有重要意义和应用，如海洋涨潮和落潮时间的预测，地球自转周期变化的计算，卫星洛希极限等。其中，地月之间的潮汐力，由于月球距离地球较近，围绕地球旋转周期较小，对地球产生的潮汐力变化对人类生产生活和自然界造成的影响尤其重要。因此，对地月潮汐力的准确建模和推导计算具有显著的必要性。

# **推导原理**

## **基本数据约定 [1]**

万有引力常量

太阳质量

地球质量

月球质量

日地平均距离

地月平均距离

地球平均半径

## **原理**

力的矢量合成和分解，用于通过坐标解析潮汐力。

王凯灵

上海交通大学 电子信息与电气工程学院 人工智能专业 大一

电子邮箱：[wangkailing151@sjtu.edu.cn](mailto:wangkailing151@sjtu.edu.cn?subject=2022年春季学期大学物理（荣誉）（1）大作业咨询)

牛顿力学三大定律，用于计算系统的离心力大小。

万有引力定律 ，用于计算月球对地球上物体的引力作为潮汐力分力。

# **模型建立**

本文讨论的潮汐力实际上是引潮力，即潮汐力与惯性离心力之和，即 。

## **太阳-地球系统和地球-月球系统的比较**

两个系统都是双星系统，都是旋转的非惯性系，而且具有对称性。

对于日地系统而言，由于 系统质心可以近似为太阳的中心。而对于地月系统，质心不能等效在地心，如图1（未修正比例），记质心位置距离地心 ，有：

， (1)

解得 ，显然 。

## **模型构建和完善**

* 依据上述过程确定质心，初步建立地月双星模型（如图2），其中，为地球，为月球。
* 物体质量记为 。为了确定物体地球上的位置，记该点与地心夹角为 。 为惯性力和引力与方向夹角，仅为方便计算。
* 该模型不考虑地球的自转和地球的公转。

# **计算和结果**

## **地月系统角速度的计算**

依据牛顿第二定律和万有引力定律，地球运动的角速度为满足：

，解得 (2)

## **特殊点的潮汐力**

考虑地球上近月点和远月点：

* ：

(3)

(4)

* ：

(5)

(6)

## **一般位置的潮汐力（以上半球为例）**

* 由余弦定理，

(7)

(8)

距离为式(7)，易得物体受月球的引力大小：

(9)

根据牛顿第二定律，物体围绕地月质心旋转，向心力指向质心，离心力为向心力反向，半径为式(8)：

(10)

* 利用三角形和三角形，解得：

(11)

(12)

(13)

(14)

* 将和按方向分解，由式(9)至(14)：

即

(15)

记为系统质心模型。其中，由式(2)， 。

由于与比较接近（下文分析），无法进行近似处理。至此，潮汐力的公式已经给出。

# **分析和结论**

## **与已有模型的横向比较**

### 与地球质心模型的比较[2]

一种经典的模型是按照日地模型的方法，将地月质心近似为地心。即将本文中的地月模型中令，并进行了近似处理，即认为月球距离地球够远。该模型的近似前的潮汐力表达式为：

(16)

记为模型1。其中，为统一参数，由(9)给出。原文中，忽略了系统旋转分量，所以形式上实际等于方法二中的分量。

### 与一种平行惯性力的模型的比较[3]

在北京大学赵凯华的《新概念物理》中，也使用了相同的模型。该模型认为，地月质心距离地心足够远，以至于可以认为地球上任何一点收到的离心力等于地心收到月球引力的反方向。该模型也进行了近似处理：

(17)

记为模型2。

### 基于具体数据的比较

对于模型1，由(1)，地月系统s质心在地球表面以下，而且考虑到，将质心等效于地心对月球引力项带来的影响小，而对与惯性力分量，造成的大小和方向上的误差较大，而且如此的含义难以确定，因为在忽略自转的系统中，地球上的点相对地心没有角速度。

方法二是十分广为接受的地月潮汐力模型，普遍出现于教材(如《新概念物理》)和讲义中。该方法认为地球上任一点离心力近似相同，其实是以地心为参考系，而并非以质心为参考系，适用于地球上的应用场景。

在地球上半球(参照图2)的赤道上，选取分别，，，，，利用数学工具代入数据计算对于的物体，三个模型的潮汐力及其分力大小如表1。

表1 三种模型的潮汐力大小

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 模型 | 系统质心模型 | 模型1 | 模型2 |
|  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | .000 | 0.000 | 0.000 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

注：由于浮点运算精度丢失，数量级极小的数应当视为0 。

可以发现，系统质心模型与模型1虽然存较大的差别，但数量级是一致的。模型2与前两者数量级相差大，是由于选取参考系不一致。模型2是以地心为参考系建立的，质心系和地心系的惯性力相差较大。由于计算时，系统质心模型与模型1使用了相同的重力表达式，故两者差异仅来自离心力分量。分别计算两个模型的离心力，并于共同的引力作比较，如表2。

表2 质心模型与模型1的分力比较

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 分力 | 质心模型 | 模型1 |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

注：表1表2及其他计算过程代码见代码仓库[openFiles](https://github.com/Loping151/openFiles/blob/main/2022Spring/physics_homework/calculation.py)。

离心力和引力维持在同一数量级，故离心力的误差会对潮汐力造成很大影响。对于模型1，质心位置等效到地心其实是不合理的。

## 关于忽略地球自转的合理性

本模型适用于处于位置在正对月球经线上的物体，地球上任意一点十分也容易，只需重新表示物体和月球距离以及物体离质心距离，再按照坐标轴分解即可。但是若考虑地球自转，则还需单独计算自转离心力。地球上赤道上物体收到离心力最大，估算地球赤道上物体离心力大小：

(18)

仍然考虑的物体，，不妨与表2中数据进行简单对比，离心力大小远大于潮汐力大小，而且对于地球上固定一点，离心力大小不会产生周期性变化，而通过建立时间的函数将地球上的点映射到模型中，可以得到潮汐力周期性变化规律。所以，在本模型中，地球自转的离心力应当忽略。

## 缺陷分析

### 地球真实形状

使用模型1的论文[1]中还将地球视为椭球体进行计算。事实上，从表1表2可以看出，由于距离旋转中心，即与质心距离误差会对潮汐力大小的计算造成较大误差。根据地球实际形状建模，并不会使模型过于复杂化。在实际应用与分析过程中，应当将地球半径相应的替换为实际与地心距离，重新计算图2中相应距离和角度。本模型采用了传统的将地球视为完美球体的近似方法，不可避免地会产生误差，且误差不能确定。对于针对地月系统的模型而言，这是不完美的。又考虑到如果实际代入了地球真实半径，会产生需要查表，表达式复杂的问题，故决定忽略这一问题。

### 数据验证

一个良好的模型，应当经过实验检验。要想考虑实际情况下地月潮汐力，首先需要排除其他力的干扰。基于徐海光教授给出的日地潮汐力表达式，计算近日点潮汐力大小，即：

(19)

利用有关实地潮汐的数据[4]尝试检验模型。考虑到影响地球表面潮汐高度的因素有：月球潮汐力，太阳潮汐力，地球自转，大气压等。由于其中大多数力都已经在地心系中有了完备的研究推导，如果在地月质心系中，问题会变得十分复杂，难以计算。于是还是考虑变回地心系。更换参考系，只需重新计算惯性力，和模型2理论上是一致的。由于模型2采用了近似，本文中将采用不进行近似的方法建立模型3：

(20)

可见，赵凯华的模型2近似方法确实存在相当的误差，约为2%。

表3 模型2与模型3的比较

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 分力 | 模型2 | 模型3 |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

注：计算过程代码见代码仓库[openFiles](https://github.com/Loping151/openFiles/blob/main/2022Spring/physics_homework/calculation.py)。

### 计算潮高结果

由于本文重点不在于分析潮高计算推导，为免占用过多篇幅，已知使用模型3推导的潮高公式近似如下:

(21)

估算结果为，数量级符合实际。但由于文献中给出的数据为引力场强度，且考虑地月距离变化，本文不能给出良好的验证方法。

### 质心模型应用场景的思考

通过实际数据检验发现，由于本模型采用的惯性系较为特殊，为地月质心系，而潮汐的研究往往在地心系中进行，本模型不能为针对地球的潮汐研究带来很大的便利。但是在地球周围的天体问题研究中，类似质心系的模型可以方便进行如地球探测装置校正等。

## 最终结论

考虑到两种参考系都有一定的应用，最终确定的质心系模型潮汐力表达式(15)和地心系表达式(20)都应当保留。

##### 致谢

本文在上海交通大学物理系徐海光教授的启发和指导下构思和撰写。感谢上海交通大学校方在疫情期间给同学们提供的学习和生活保障。感谢徐海光教授在线上授课过程中对同学们的理解和体谅，以及悉心指导。我对徐海光教授先进的教学理念感到由衷的认可与倾佩。感谢汪丽和杨明焘两位助教提供的支持，联系人胡曦同学认真负责的联络工作。感谢小组成员王浩丞，郑泽一，李奇睿同学提供的宝贵想法，以及夏泰熙同学的指点。

##### 参考文献

1. Peter J. Mohr and Barry N. Taylor, "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 1998," Journal of Physical and Chemical Reference Data, Vol. 28, No. 6, 1999 and Reviews of Modern Physics, Vol. 72, No. 2, 2000
2. Razmi H. On the tidal force of the Moon on the Earth[J]. European journal of physics, 2005, 26(5): 927.
3. 韩忠全. 潮汐现象的成因及规律分析[J]. 物理教学探讨: 中学教学教研专辑, 2010 (2): 27-28.
4. Avsyuk Y N, Maslov L A. Long period tidal force variations and regularities in orbital motion of the Earth-Moon binary planet system[J]. Earth, Moon, and Planets, 2011, 108(1): 77-85.